

文章编号:1674-2869(2015)12-0069-06

# 基于降维压缩法的图像重构

韦 仙,康睿丹

太原工业学院理学系,山西 太原 030008

**摘 要:**针对人脸图像易受环境因素的影响造成缺失或者受噪声污染,提出了从有限的信息中重构完整的图像矩阵的方法.首先利用奇异值压缩降维的方法提取人脸图像的特征值,并运用基于凸优化的矩阵填充技术对缺失的图像矩阵进行有效重构,然后采用固定点迭代算法,通过 Matlab 语言编程,进行分裂法迭代,在选取合适参数的情况下使运行程序快速收敛至目标矩阵,减小了运行时间.分析峰值信噪比随奇异值个数的变化关系,对人脸图像的保真度进行评估,通过对不同采样率下人脸图像重构效果的对比,运行时间的分析,得出降维压缩技术能够有效实现图像矩阵填充的结论.

**关键词:**矩阵填充;人脸识别;低秩;奇异值分解

中图分类号:O411.1

文献标识码:A

doi:10.3969/j.issn.1674-2869.2015.12.015

## 0 引 言

近年来,矩阵填充(Matrix completion, MC)理论逐渐受到越来越多学者的关注,它是一种高效的信号数据处理技术.在实际研究中,图像、信号、数据等都可以利用矩阵的形式表示,但由于受到实验条件限制,获得的矩阵元素往往是缺失、受噪声污染的.如何通过有效算法计算得到干净、完整的矩阵?这便是矩阵填充研究的问题,其核心思想是通过采集部分元素重构出目标矩阵,在重构精度上体现出优越性.

基于矩阵填充技术重构图像矩阵,应用于人脸识别,在保证较高保真度基础上对人脸图像矩阵进行压缩降维处理,利用矩阵填充算法有效实现重构.对研究人脸识别与追踪问题具有积极意义.

## 1 相关技术

### 1.1 图像降维处理

将数值元素写成低秩矩阵的形式称之为矩阵的降维过程.矩阵降维技术作为获取相关性和去噪的基本工具,广泛应用于图像压缩、计算机视图、机器学习等领域.降维的目的在于从有限缺失的信息中获得更简洁的数据表示,一种经典的降维技术是基于奇异值分解实现低秩逼近.与其他低秩逼近方法比较,奇异值分解的重建误差较小<sup>[1]</sup>.

由于图像矩阵的奇异值是人脸识别的代数特征量,能够反映人脸图像的内在属性和本质特征<sup>[2-3]</sup>,利用奇异值分解的方法能够对获得的人脸图像矩阵进行合理的降维处理,在不影响估计性能的前提下,有效地降低计算量,节约时间和成本<sup>[4]</sup>.

将人脸图像写成矩阵的形式,设  $M \in R^{m \times n}$  是原始图像,  $X \in \Omega$  是重建的近似图像,整数  $r$  满足  $1 \leq r < \text{rank}(M)$ ,  $\Omega$  为矩阵集合,  $\|\cdot\|$  为矩阵范数,拟合秩为  $r$  的矩阵  $X$ ,使其有

$$\|M-X\| = \min_{X \in \Omega, \text{rank}(X)=r} \|M-X\|$$

应该指出,对于矩阵  $X$  的重构过程必须在集合  $\Omega$  和秩为  $r$  的限制条件之内.

对矩阵  $M$  进行奇异值分解<sup>[5]</sup>,即  $M^{(v)} = U^{(v)} \Sigma^{(v)} V^{(v)}$ ,令  $S_1^{(v)}, S_2^{(v)}, \dots$  表示奇异值  $\Sigma^{(v)}$  的对角元素,现将矩阵  $\Sigma^{(v)}$  的对角元替换为  $\{S_1^{(v)}, \dots, S_k^{(v)}, 0, \dots, 0\}$ ,记为  $\Sigma'^{(v)}$  定义

$$X^{(v)} := U^{(v)} \Sigma'^{(v)} V^{(v)T}$$

在投影过程中,矩阵集合  $\{M\}$  满足不等式

$$\|M^{(v+1)} - X^{(v+1)}\|_F \leq \|M^{(v+1)} - X^{(v)}\|_F \leq \|M^{(v)} - X^{(v)}\|_F$$

由此能够对原始图像矩阵进行降维处理,并利用矩阵填充技术在已知部分数据的前提下实现人脸图像的重构.人脸图像重构流程图如图 1 所示.

收稿日期:2015-11-05

基金项目:太原工业学院院级青年科学基金(2014LQ05)

作者简介:韦 仙(1988-),女,山西晋城人,助理实验师,硕士.研究方向:压缩感知与矩阵填充.

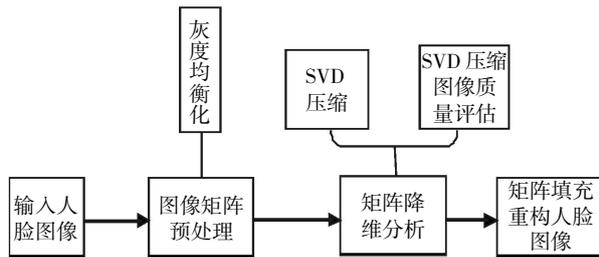


图 1 人脸图像重构流程图

Fig.1 Flow diagram of face image reconstruction

## 1.2 矩阵填充原理

由于重构的近似图像矩阵  $X$  是秩为  $r$  的低秩矩阵,其独立元的个数  $d_f=(2mn-r)r$  远小于维数  $m \times n$ . 这说明只要采样数目大于  $d_f$ ,是有可能从采集的有限元素中重构矩阵  $X$ ,该问题能够通过解决如下凸优化问题实现:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \text{rank}(X) \\ & \text{subject to } X_{ij}=M_{ij}(i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $X$  为重构矩阵,  $\text{rank}(X)$  表示矩阵  $X$  的秩. 这是一种根据观测数据拟合矩阵的普遍方法,如果存在唯一的低秩拟合数值,那么能够实现重构,但这是个 NP-hard 问题,在理论和数值实验中需要大量时间,不具有应用价值.

如果秩为  $r$  的矩阵能够进行奇异值分解,那么在限制集合内能够用奇异值之和最小化来替代(1)式中秩最小化问题,有

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|X\|_* \\ & \text{subject to } X_{ij}=M_{ij}(i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\|X\|_* = \sum_{k=1}^n \sigma_k(X)$  表示核范数,  $\sigma_k(X)$  为矩阵  $X$  的奇异值.

由于核范数是凸函数,能够通过半正定程序有效优化. 则式(1)的 NP-hard 问题成功转化为凸优化问题,只需要选择合适的算法程序就能够实现矩阵的重构.

如果矩阵的某一行或者列的所有元素都没有被采样得到,那么无论采用何种理论和方法都不可能填充出这一行或者列的数值. 因此,当采样方式满足一定条件时,才有可能实现矩阵重构. 矩阵填充的采样方式一般是随机等分采样.

如果矩阵的行和列几乎都由零值组成,那么无论使用何种采样方式都不可能实现重构,原因是对于大部分的采样集合,得到的都是零值以至于没有办法计算出非零数据. 比如矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于这样的矩阵只有右上角一个数值,其余均为 0,虽然是低秩矩阵却无法利用矩阵填充原理实现重构<sup>[6]</sup>. 这就要求想要重构的目标矩阵  $M$  的奇异向量高度集中,能够在非零空间中进行采样操作. 即,奇异向量在标准基内具有不相关性,为了使观测值数目最小化,有如下定义:

假设  $U$  为  $R^n$  的子空间,  $P_U$  为在  $U$  上的正交投影,则  $U$  的相关性表示为

$$\mu(U) = \frac{n}{r} \max_{1 \leq i \leq n} \|P_U e_i\|^2$$

其中  $i$  为子空间  $U$  的维度,  $e_i$  为标准基. 对于任意子空间,  $\mu(U)$  的最小值为 1,如果  $U$  由元素值为  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  倍数的向量测量得到,那么  $\mu(U)$  的值为

$\frac{n}{r}$ . 对于低相关性的矩阵,对应于子空间中的行列值均具有低相关性,则不能在零空间进行采样.

对矩阵  $X$  进行奇异值分解,有

$$X = \sum_{1 \leq k \leq r} U_k \sigma_k V_k^*$$

其中  $U$  和  $V$  分别代表行列向量空间.

由于矩阵的相关性满足  $\max(\mu(U), \mu(V)) \leq \mu_0$ ,  $X = \sum_{1 \leq k \leq r} U_k \sigma_k V_k^*$  的最大值上限为  $\mu_0 \sqrt{r/n^2}$ , 则满足柯西-施瓦茨不等式:

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq r} U_{ik} V_{jk} \right| \leq \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq r} |U_{ik}|^2} \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq r} |V_{jk}|^2} \leq \frac{\mu_0 r}{n}$$

## 1.3 基本算法

核范数最小化过程是一个凸优化线性约束问题. 虽然能够转换为一个半正定程序解决,但是这种方法在计算大矩阵上是耗时耗资的. 固定点迭代算法<sup>[7]</sup>(FPC),在求解核范数最小化问题上体现了用时短,重构误差小的优越性.

核范数被称为 Schatten-1 范数或 Ky-Fan 范数,式(2)的核范数问题亦可写成

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|X\|_* \\ & \text{subject to } A(X) = b \end{aligned} \quad (3)$$

若  $b$  受噪声污染,则约束条件改写成

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|X\|_* \\ & \text{subject to } \|A(X) - b\|_2 \leq \theta \end{aligned} \quad (4)$$

其拉格朗日形式为

$$\text{minimize } \tau \|X\|_* + \frac{1}{2} \|A(X) - b\|_2^2 \quad (5)$$

其中  $\theta$  和  $\tau$  均为中间参数.

利用 FPC 算法解决式(5)的问题如下:

$$\begin{cases} Y = X - \varepsilon g(X) \\ X^{t+1} = \Gamma_{\varepsilon\tau}(Y) \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\Gamma(\square)$  表示矩阵的收敛操作. 该算法的核心是算子分裂技术, 设  $X^*$  为式(5)的最优解, 当且仅当

$$0 \in \tau \Gamma GN(X^*) + g^* \quad (7)$$

其中  $g^* = A^T(AX^* - b)$ , 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 式(7)等价于

$$0 \in \varepsilon\tau \Gamma GN(X^*) + \varepsilon g(X^*) \quad (8)$$

设  $T(\cdot) := \varepsilon\tau \Gamma GN(X^*) + \varepsilon g(X^*)$ , 能够分成如下两部分:  $T(\cdot) = T_1(\cdot) - T_2(\cdot)$ , 其中  $T_1(\cdot) = \varepsilon\tau \Gamma GN(\cdot) + I(\cdot)$  且  $T_2(\cdot) = I(\cdot) - \varepsilon g(\cdot)$ .

设  $y = T_2(X^*) = X^* - \varepsilon A^T(AX^* - b)$ , 式(8)又可写成

$$0 \in T_1(X^*) - y = \varepsilon\tau \Gamma GN(X^*) + X^* - y \quad (9)$$

式(9)实际上是如下凸问题的优化条件

$$\min_{X^*} \varepsilon\tau \|X^*\|_* + \frac{1}{2} \|X^* - y\|_2^2$$

该问题的最优解由收敛算子给出:

$$X^* = \tilde{\Gamma}_v(y)$$

其中  $v = \varepsilon\tau$  及收缩算子为  $\tilde{\Gamma}_v(\cdot)$ .

$$\tilde{\Gamma}_v(\cdot) = \text{sgn}(\cdot) \cdot \max\{|\cdot| - v, 0\} \quad (10)$$

因此, FPC 迭代算法由式(11)给出.

$$X^{t+1} = \tilde{\Gamma}_{\varepsilon\tau}(X^t - \varepsilon g^t) \quad (11)$$

由于式(5)的主函数是凸的, 当且仅当

$$0 \in \tau \partial \|X^*\|_* + g(X^*) \quad (12)$$

时,  $X^*$  是最优解. 其中  $g(X^*) = A^T(A(X^*) - b)$ , 对  $X$  进行奇异值分解, 即  $X = U \Sigma V^T$ , 其中,  $\Sigma = \text{Diag}(\sigma) \in R^{r \times r}$ ,  $V \in R^{r \times r}$  那么

$$\partial \|X\|_* = \{UV^T + W: U^T W = 0, WV = 0, \|W\|_2 \leq 1\}$$

其中矩阵  $W \in R^{m \times n}$  满足

$$\begin{cases} \tau(UV^T + W) + g(X) = 0 \\ U^T W = 0, WV = 0, \|W\|_2 \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

则有

$$0 \in \varepsilon\tau \partial \|X^*\|_* + X^* - (X^* - \varepsilon g(X^*)) \quad (14)$$

对任意  $\varepsilon > 0$ , 如果  $Y^* = X^* - \varepsilon g(X^*)$

式(14)式变为

$$0 \in \varepsilon\tau \partial \|X^*\|_* + X^* - Y^*$$

$$\min_{X \in R^{m \times n}} \varepsilon\tau \|X\|_* + \frac{1}{2} \|X - Y^*\|_F^2 \quad (15)$$

由此得出  $X^*$  的优化解满足.

利用固定点迭代法解决式(5)的具体步骤:

(1)初始化: 给定  $X_0, \bar{\tau} > 0$ . 选取  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_L = \bar{\tau} > 0$ . 设置  $X = X_0$ .

(2)以  $\tau = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L$ , 开始,  $\varepsilon > 0$  数列收敛时, 计算  $Y = X - \varepsilon A^*(A(X) - b)$ , 且对  $Y$  作 SVD 分解,  $Y = U \text{Diag}(\sigma) V^T$ , 计算  $X = U \text{Diag}(\Gamma_{\varepsilon\tau}(\sigma)) V^T$ .

(3)逐次迭代至数列不收敛时结束.

## 2 数值结果与分析

采用 2.2 GHz CPU, 4 GByte 内存的计算机进行模拟仿真实验, 使用 MATLAB 编码运行算法程序.

将降维技术应用于人脸图像矩阵中, 用 ORL 国际标准人脸数据库中 S40 的图像作为研究对象, 其图像维数为  $112 \times 552$ , 对图像矩阵进行奇异值分解, 分析奇异值大小与维数的关系(见图 2)可知, 并非所有的奇异值均对图像信息有较大贡献, 只需要提取出具有决定因素的奇异值就能够充分反映图像特征, 从而实现图像的压缩降秩, 在保证图像质量的前提下, 尽可能地降低矩阵的秩, 而评估图像质量的常用函数有: 均方根误差  $S_{\text{RMSE}}$ , 信噪比  $Q_{\text{SNR}}$ , 峰值信噪比  $Q_{\text{PSNR}}$  等. 下面给出峰值信噪比  $Q_{\text{PSNR}}$  的计算公式, 分析重建图像质量

$$Q_{\text{PSNR}} = 10 \times \lg \left( \frac{(2^n - 1)^2}{S_{\text{RMSE}}} \right)$$

$$S_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2}{mn}}$$

从图 2 可知, 随着维数的增大, 奇异值逐渐减小, 较大的奇异值数量级在  $10^4$ , 较小的奇异值为

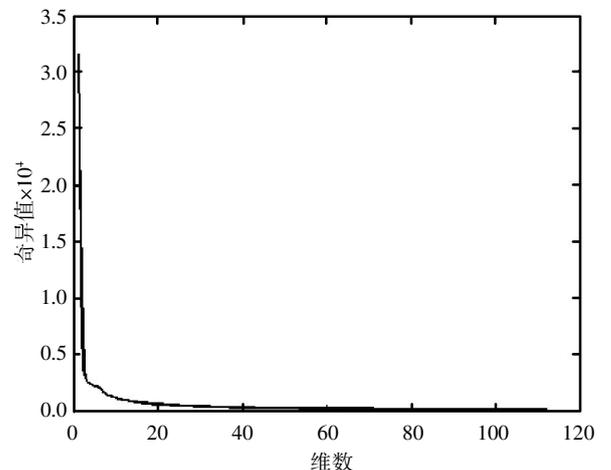


图 2 奇异值与矩阵维数的关系曲线

Fig.2 Relation curve between singular value and matrix dimension

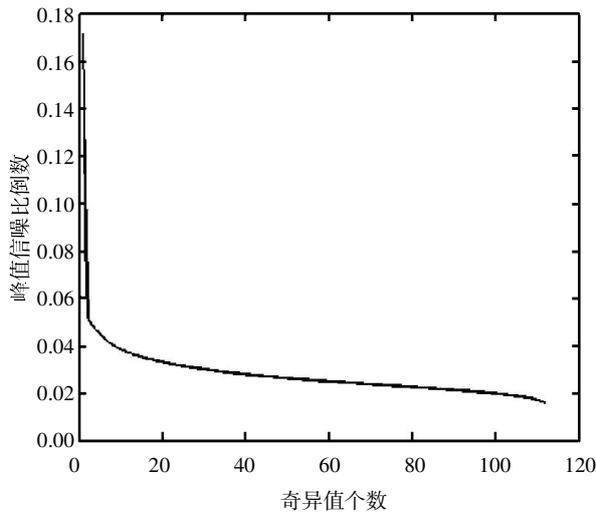


图 3 奇异值个数与  $1/Q_{PSNR}$  关系曲线

Fig.3 Relation curve between singular values and  $1/Q_{PSNR}$

50 左右,由于奇异值越小,对图像保真度的影响越低,那么能够将数值较小的,对图像特征贡献少的奇异值合理舍去,并结合奇异值个数与峰值信噪比的关系(见图 3),确定降维后的人脸图像矩阵.图 3 中秩为 35 对应的  $Q_{PSNR}$  值等于 35 时,重建的人脸图像轮廓清晰,与原图基本无差别,保证了图像的质量.这说明能够将维数为  $112 \times 552$  的人脸图像压缩成秩为 35 的图像输出.

人脸识别广泛应用于公安检查、监控等方面,但由于实际条件的限制,获得的图像矩阵往往是缺失的,为了获得较高清晰度的人脸图像,除了利用奇异值分解提取特征信息外,还要求将目标矩阵从获得的部分数据中重构出来.

利用矩阵填充算法,分析不同采样率下对人脸图像的重构效果(见图 4).其中第一行是原始图



图 4 降秩处理后不同采样率下图像矩阵填充效果

Fig.4 Reduced-rank matrix completion with different sample rates

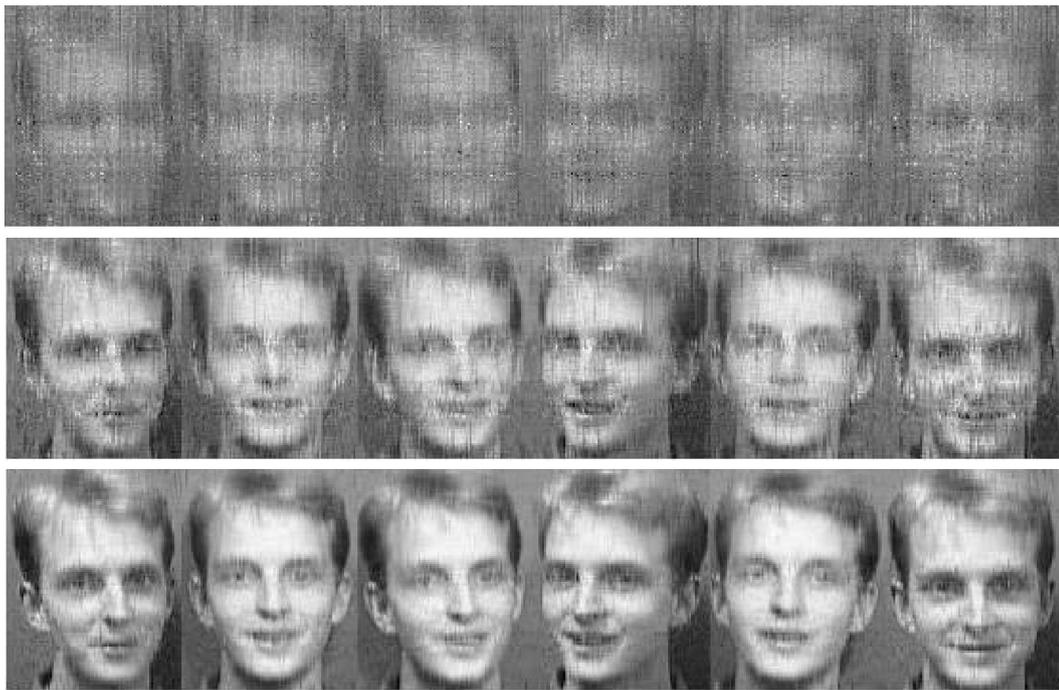


图 5 未经降秩处理不同采样率下图像重够效果

Fig.5 Images of reconstruction results of different sample rates without reducing rank

像,第二行是秩为 35 时的重建图像,第三、四、五行分别是采样率为 10%、30%、50%的效果图. 将未经降秩处理直接进行采样的图像进行重构,效果如图 5 所示,其中第一、二、三行分别对应采样率为 10%、30%、50%的效果图. 对于图 4,秩为 35 时重建图像清晰可辨,说明压缩降维处理合理有效. 当采样率为 10%时,由于采样数目  $m=6\ 182$  小于独立元个数  $d_f=22\ 015$ ,不符合矩阵填充重构条件,图像模糊失真;采样率为 30%时,能够识别出人脸轮廓;采样率为 50%时,图像整体清晰,虽有模糊,但人脸的识别度较高,与图 5 进行对比,容易看出,通过降维处理后,重构的人脸图像比较清晰.

图 6 给出运行时间和采样率的关系图,随着采

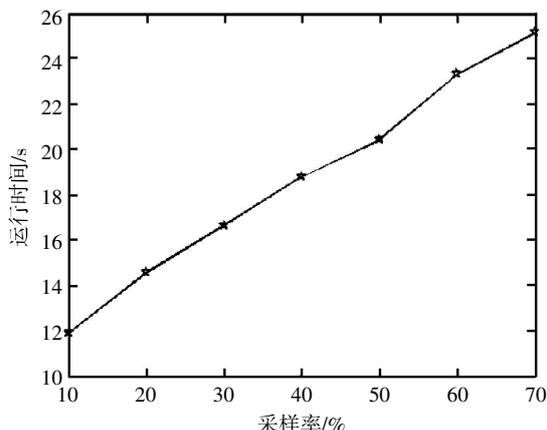


图 6 运行时间与采样率关系图

Fig.6 Relation curve between run-time and sample rates

样率逐渐增大,程序运行时间变长,当采样率为 70%时,运行时间为 25 s,均不超过 1 min,这说明通过降维处理的矩阵填充技术能够有效地实现人脸图像的重构.

### 3 结 语

利用奇异值分解法提取人脸图像特征,并进行降维分析,在不影响图像质量前提下,运用矩阵填充技术重构人脸图像,利用计算机模拟,分析实验数值结果表明,重构效果较好,运行时间较短. 对人脸识别的研究工作具有一定的指导意义和参考价值.

#### 参考文献:

- [1] 杨济美,向世明,刘荣,等.矩阵低秩逼近的快速增量算法及其在人脸图像中的应用[J].中国科学技术大学学报,2009,39(9):970-979.  
YANG Ji-mei, XIANG Shi-ming, LIU Rong, et al. A fast incremental algorithm for low rank approximations of matrices and its applications in facial images [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2009, 39(9):970-979.(in Chinese)
- [2] HONG Z Q. Algebraic feature extraction of image for recognition [J].Pattern Recognition, 1991, 24(3):211-219.
- [3] BEGHDADI A, PESQUET P B. A new image distortion measure based on wavelet decomposition [J].Proc of

- IEEE ISSPA, 2003(1):485-488.
- [4] 夏平平, 吕太之. 动态人脸识别系统的设计与实现[J]. 武汉工程大学学报, 2011, 33(10):107-110.  
XIA Ping-ping, LYU Tai-zhi. Design and implementation of a dynamic faces recognition system [J]. Journal of Wuhan Institute of Technology, 2011, 33(10):107-110.(in Chinese)
- [5] 韦仙. 基于矩阵填充技术重构低秩密度矩阵[J]. 武汉工程大学学报, 2015, 37(2):72-76.  
WEI Xian. Reconstructing low-rank density matrix via matrix completion [J]. Journal of Wuhan Institute of Technology, 2015, 37(2):72-76. (in Chinese)
- [6] EMMANUEL J C, BENJAMIN R. Exact low-rank matrix completion via convex optimization[J]. IEEE, 2008(23-26): 806-812.
- [7] MA Shi-qian, DONALD G, CHEN Li-feng. Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization [J]. Mathematical Programming, 2011, 128(1-2):321-353.

## Image reconstruction based on dimension reduction and compression technology

*WEI Xian, KANG Rui-dan*

Faculty of Science, Taiyuan Institute of Technology, Shanxi 030008, China

**Abstract:** Aimed at that the face image is usually missing and corrupted by noise under the impact of environmental factors, we proposed a method to reconstruct the complete image matrix from the limited information. Firstly, we applied the matrix completion theory to reconstruct the image matrix whose eigenvalues are effectively extracted using the method of singular value compression. Then, we used the matrix completion technology based on the convex optimization to study the problem of missing matrix reconstruction by running the fixed point iterative algorithm. This algorithm can quickly converge to the target matrix in the case of selecting appropriate parameters by conducting splitting iteration with the help of Matlab programming language, which reduces the running time. We evaluated the fidelity of the face image by analyzing the relationship between the peak signal to noise ratio and the number of singular values. The conclusion shows that the image matrix is effectively completed using the technology of dimension compression through analyzing the effect of face image reconstruction under different sampling rates and the run-times.

**Keywords:** matrix completion; face recognition; low-rank; singular value decomposition

本文编辑:陈小平