

文章编号:1674-2869(2019)02-0184-06

分数阶基因调控网络的拉格朗日稳定性

陈冲,胡蝶,丁芝侠*

武汉工程大学电气信息学院,湖北 武汉 430205

摘要:研究了一类分数阶基因调控网络的拉格朗日稳定性问题。首先,将分数阶微分算子引入到传统的整数阶基因调控网络中,建立了新型的分数阶基因调控网络,不仅可以有效地描述系统的记忆遗传特征,还可以真实地反映系统的本质特性;其次,利用拉普拉斯变换方法,卷积公式和 Mittag-Leffler 函数的性质,得到了此类系统拉格朗日稳定性的充分判据。另外,所得的判据还涵盖了相关整数阶基因调控网络的结果。最后,通过一个仿真实例,验证了该系统拉格朗日稳定性判据的有效性和合理性。

关键词:分数阶基因调控网络;拉普拉斯变换;Mittag-Leffler 函数;拉格朗日稳定

中图分类号:TP183 **文献标识码:**A **doi:**10.3969/j.issn.1674-2869.2019.02.016

Lagrange Stability Analysis of Fractional-Order Gene Regulatory Networks

CHEN Chong, HU Die, DING Zhixia*

School of Electrical and Information Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China

Abstract: The Lagrange stability for a class of fractional-order gene regulatory networks (FGRN) was investigated. Firstly, a new FGRN was built by introducing fractional-order differential operator into traditional integer-order model, which effectively described memory properties of system and accurately depicted the real characteristics of the system. Then, we obtained some sufficient criteria on Lagrange stability of FGRN by using Laplace transform method, convolution formula and properties of Mittag-Leffler function. It was noted that our results were still hold for integer-order gene regulatory networks. Finally, we verified the validity and rationality of the Lagrange stability of FGRN using an example of simulation.

Keywords: fractional-order gene regulatory networks; Laplace transform; Mittag-Leffler function; Lagrange stability

基因调控网络描述了基因和蛋白质之间的某种复杂联系,已经得到了深入的发展,并在化学、生物科学、医学、工程科学、数学等领域存在着广阔的应用前景^[1-4]。生物体对外部信号的响应是通过基因网络的高连通性和复杂性实现的,而基因网络的特性又与基因预编码相关联;细胞内脱氧核糖核酸构成的染色体,其包含了生物体随外界环境生长所需要的各种信息,更与有机体中的复杂机制、生理调节等功能密切相关,因此它在生物医学方面扮演着重要的角色^[2-5]。由此看来,对基

因调控网络稳定性的研究显得尤为重要。

传统的基因调控网络是通过整数阶微分系统描述的,但由于整数阶算子具有局限的特征,而且缺乏对系统记忆性和遗传性的精确描述,故引入分数阶微积分算子,建立了新型的分数阶基因调控网络。目前,关于分数阶基因调控网络的研究已存在:Zhang等^[3]利用 Jensen 不等式、Wirtinger 不等式、分数阶李亚普诺夫方法和积分中值定理,给出了时滞分数阶基因调控网络系统(fractional-order gene regulatory networks, FGRN)稳定性分析的

收稿日期:2018-12-26

基金项目:国家自然科学基金(61703312)

作者简介:陈冲,硕士研究生。E-mail:1186038749@qq.com

*通讯作者:丁芝侠,博士,讲师。E-mail:zxding89@163.com

引文格式:陈冲,胡蝶,丁芝侠. 分数阶基因调控网络的拉格朗日稳定性[J]. 武汉工程大学学报, 2019, 41(2): 184-189.

新判据;Ren等^[6]利用李亚普诺夫方法建立了这类网络的 Mittag-Leffler 稳定性和广义 Mittag-Leffler 稳定性的判据,证明了基因调控网络的稳定性;Zhang等^[7]提出了基于扩展分数卡尔曼滤波(extended fractional Kalman filter,EFKF)的分数阶基因调控算法来估计模型的隐含状态和未知的静态参数,这些成果都为深入研究生物系统中基因之间的潜在调控关系提供了思路。

在实际的应用中,为了研究系统的多稳定性,拉格朗日稳定性的定义得到了广泛的应用^[8-12]。拉格朗日稳定性是基于考虑系统解的有界性和全局吸引集的存在性,考虑的是系统的整体稳定性,而并非平衡点的稳定性^[13]。目前,对分数阶基因调控网络的拉格朗日稳定性的研究不多,但无论从理论角度还是应用角度来看,对基于分数阶基因调控网络的拉格朗日稳定性的研究是尤为重要的。本文考虑了微分阶 $0<\alpha<1$ 为情况下的分数阶基因调控网络的稳定性。通过运用拉普拉斯变换、卷积公式及 Mittag-Lifter 函数的性质,导出了系统微分阶 $0<\alpha<1$ 情况下的拉格朗日稳定性判据,同时,所得结论在整数阶 $\alpha=1$ 的情况下仍然成立。分析系统拉格朗日稳定性,有助于在优化计算、联想记忆、混沌控制等方面缩小搜寻范围,为应用提供便利^[13]。

1 概 述

分数阶微积分是整数阶常微积分的一种推广,其主要优点在于对系统记忆性和遗传性的精确描述,同时也能较好的揭示出系统的本质特征^[13]。本文主要将 Caputo 分数阶微积分应用于基因调控网络。因此,在本节,将会给出 Caputo 分数阶微积分的定义及引理。

定义 1^[14] Caputo 分数阶微分可以定义为:

设 $\alpha>0$, $t>t_0$, $X(t)\in C^{n+1}[t_0,+\infty]$, 同时, n 是正整数,满足 $n-1<\alpha<n$, 则

$${}_t^C D_t^\alpha X(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^t(t-\zeta)^{n-\alpha-1}X^{(n)}(\zeta)d\zeta \text{ 其中,}$$

$\Gamma(\cdot)$ 表示的是 gamma 函数,其定义如下:

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{z-1}dt。$$

特别的, $0<\alpha<1$ 时,有:

$${}_t^C D_t^\alpha X(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^t(t-\zeta)^{-\alpha}X'(\zeta)d\zeta$$

定义 2^[14] Caputo 分数阶积分可以定义为:

设 $\alpha>0$, $t>t_0$, 则

$${}_t^C D_t^{-\alpha} X(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^t(t-\zeta)^{\alpha-1}X(\zeta)d\zeta$$

定义 3^[14] 两个参数的 Mittag-Leffler 函数定义:设 $\alpha>0,\beta>0,x\in C$, 则

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{x^\eta}{\Gamma(\alpha\eta+\beta)}$$

特别地, $\beta=1$ 时,有:

$$E_\alpha(x)=\sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{x^\eta}{\Gamma(\alpha\eta+1)}$$

Mittag-Leffler 函数的 k 阶导数有:

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(x)=\sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{(\eta+k)!\cdot x^\eta}{\eta!\cdot\Gamma(\alpha\eta+\alpha k+\beta)}$$

其中 k 为正整数。

特别地, $\beta=1$ 时,有:

$$E_\alpha^{(k)}(x)=\sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{(\eta+k)!\cdot x^\eta}{\eta!\cdot\Gamma(\alpha\eta+\alpha k+1)}$$

定义 4^[14] 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有定义,如

果对于复参变量 $s=\beta+jw$, 积分 $F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$

在复平面的某一区域内收敛,则 $F(s)$ 称为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换,记为 $L[f(t)]=F(s)$ 。

则有:

$$L[f(t)*g(t)]=L[f(t)]\cdot L[g(t)]\times L[t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(-\kappa t^\alpha)]=$$

$$\frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha+\kappa)^{k+1}}\times L[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\kappa t^\alpha)]=$$

$$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha+\kappa}L[{}_t^C D_t^\alpha f(t)]=s^\alpha F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f(t_0)$$

其中 $n-1<\alpha<n,n\in N_+$, $*$ 表示卷积符号。

引理 1^[15] (I) 对任意 $0<\alpha<1$, 存在不小于 1 的实常数 M_1,M_2 , 使得

$$\begin{cases} E_\alpha(\kappa t^\alpha)\leq M_1\|e^{\kappa t}\| \\ E_{\alpha,\alpha}(\kappa t^\alpha)\leq M_2\|e^{\kappa t}\| \end{cases} \tag{1}$$

(II) 当 $\beta=1,2,\cdots,\alpha$ 若 $\alpha\geq 1$, 则

$$E_{\alpha,\beta}(\kappa t^\alpha)\leq\|e^{\kappa t^\alpha}\| \tag{2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示范数。

2 模型的描述

分数阶基因调控网络的模型为:

$$\begin{cases} {}_t^C D_t^\alpha m_i(t)=h_i[p_1(t),p_2(t)\cdots p_n(t)]-w_i m_i(t) \\ {}_t^C D_t^\alpha p_i(t)=-r_i p_i(t)+l_i m_i(t) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $i=1,2,3\cdots,n$, $0<\alpha<1$, $r_i>0$ 和 $w_i>0$ 分别表示的是 mRNA 的降解速率和蛋白质的降解速率; $m_i(t)$ 和 $p_i(t)$ 分别表示第 i 个基因的 mRNA 的浓度和蛋白质的浓度; l_i 表示第 i 个基因的蛋白

质合成速率; $h_i[p_1(t), p_2(t) \cdots p_n(t)]$ 是一个非线性函数, 常被称为基因调控网络的一个光滑函数。为研究方便, 定义:

$$\begin{aligned} f(t) &= [m_1(t), m_2(t), \cdots, m_n(t)]^T \\ g(t) &= [p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)]^T \end{aligned}$$

本文主要基于分数阶微积分理论, 将其记忆性和遗传性的性质应用于基因调控网络, 使得分数阶基因调控网络的模型更符合实际研究的情况。

定义5 拉格朗日渐近稳定的定义^[16]:

如果存在正常数 ξ_1 和 ξ_2 , 使得式(3)的任意解 $f(t, t_0, f_0)$ 和 $g(t, t_0, g_0)$ 满足

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(t, t_0, f_0)\| &\leq \xi_1 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|g(t, t_0, g_0)\| &\leq \xi_2 \end{aligned}$$

即, 存在一个常数 $T(t, t_0, g_0)$, 在 $t \geq t_0 + T(t, t_0, f_0, g_0)$ 时, 有 $\|f(t, t_0, f_0)\| \leq \xi_1$ 和 $\|g(t, t_0, g_0)\| \leq \xi_2$ 成立, 则称系统是拉格朗日渐近稳定。

3 系统的稳定性分析

通过运用拉格朗日渐近稳定性理论, 主要讨论分数阶基因调控网络的稳定性。

定理1: 如果存在正常数 ς , 使得 $\|h_i[p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)]\| \leq \varsigma$, 则称系统是拉格朗日渐近稳定的。

证明: 设 $m_i(t_0)$ 和 $p_i(t_0)$ 是系统的初值, 将式(3)进行拉普拉斯变化, 有

$$\begin{cases} s^\alpha M_i(s) - s^{\alpha-1} m_i(t_0) = -w_i M_i(s) + H_i(s) \\ s^\alpha P_i(s) - s^{\alpha-1} p_i(t_0) = -r_i P_i(s) + l_i M_i(s) \end{cases} \quad (4)$$

其中: $M_i(s) = L[m_i(t)]$, $P_i(s) = L[p_i(t)]$, $H_i(s) = L\{h_i[p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)]\}$

对式(4)进行化简有:

$$\begin{aligned} \|p_i(t)\| &\leq \|l_i m_i(t_0) \cdot t^\alpha E_{\alpha, \alpha}^{(1)}(-r_i t^\alpha)\| + \\ &\|p_i(t_0)\| \cdot \|E_\alpha(-r_i t^\alpha)\| + \\ &\|l_i\| \cdot \int_0^t \tau^{2\alpha-1} \cdot E_\alpha^{(1)}(-r_i \tau^\alpha) \cdot \varsigma \, d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)进行反拉普拉斯变换, 则需要考虑 $r_i \neq w_i$ 和 $r_i = w_i$ 两种情况。

情况1: $r_i = w_i$, 式(5)进行反拉普拉斯变换有:

$$\begin{cases} m_i(t) = m_i(t_0) \cdot E_\alpha(-w_i t^\alpha) + \\ t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-w_i t^\alpha) * h_i[p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)] \\ p_i(t) = l_i m_i(t_0) \cdot t^\alpha E_{\alpha, \alpha}^{(1)}(-r_i t^\alpha) + p_i(t_0) \cdot E_\alpha(-r_i t^\alpha) + \\ l_i t^{2\alpha-1} \cdot E_\alpha^{(1)}(-r_i t^\alpha) * h_i[p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t)] \end{cases} \quad (6)$$

根据引理1, 有:

$$\|E_\alpha(-w_i t^\alpha)\| \leq M_{E_\alpha} \|e^{-w_i t}\|$$

$$\|E_{\alpha, \alpha}(-w_i t^\alpha)\| \leq M_{E_{\alpha, \alpha}} \|e^{-w_i t}\|$$

其中 M_{E_α} 和 $M_{E_{\alpha, \alpha}}$ 均为不小于1的常数。则对于 $m_i(t)$:

$$\begin{aligned} \|m_i(t)\| &\leq \|m_i(t_0)\| \cdot M_{E_\alpha} \cdot \|e^{-w_i t}\| + \\ &\int_0^t \tau^{\alpha-1} M_{E_{\alpha, \alpha}} e^{-w_i \tau} h_i(t-\tau) \, d\tau \leq \\ &\|m_i(t_0)\| \cdot M_{E_\alpha} \cdot \|e^{-w_i t}\| + \\ &M_{E_{\alpha, \alpha}} \cdot \varsigma \cdot \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{-w_i \tau} \, d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

由于 $\int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{-w_i \tau} \, d\tau$ 是收敛的, 则存在正常数 v_1 ,

使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|m_i(t)\| \leq v_1$ 成立。

对于 $p_i(t)$:

$$\begin{cases} M_i(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + w_i} m_i(t_0) + \frac{H_i(s)}{s^\alpha + w_i} \\ P_i(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + r_i} p_i(t_0) + \frac{l_i s^{\alpha-1} m_i(t_0)}{(s^\alpha + r_i)(s^\alpha + w_i)} + \\ \frac{l_i H_i(s)}{(s^\alpha + r_i)(s^\alpha + w_i)} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha, \alpha}^{(1)}(-r_i t^\alpha)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-r_i t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha + 1)} \right\| = \\ &\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot t^{an-n} (-r_i t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + \alpha + 1) \cdot n!} \right\| \leq \\ &\sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{(n+1)! \cdot t^{an-n}}{\Gamma(n\alpha + \alpha + 1)} \|e^{-r_i t}\| \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \|E_\alpha^{(1)}(-r_i t^\alpha)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-r_i t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right\| = \\ &\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot t^{an-n} (-r_i t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1) \cdot n!} \right\| \leq \\ &\sup_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{(n+1)! \cdot t^{an-n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \|e^{-r_i t}\| \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \|p_i(t)\| &\leq \|p_i(t_0)\| \cdot M'_{E_\alpha} \cdot \|e^{-r_i t}\| + \\ &\|l_i m_i(t_0)\| t^\alpha M'_{E_\alpha} \|e^{-r_i t}\| + \\ &\|l_i\| M'_{E_{\alpha, \alpha}} \int_0^t \tau^{2\alpha-1} e^{-r_i \tau} \cdot \varsigma \, d\tau \leq \\ &\|p_i(t_0)\| \cdot M'_{E_\alpha} \cdot \|e^{-r_i t}\| + \\ &\|l_i m_i(t_0)\| t^\alpha M'_{E_\alpha} \|e^{-r_i t}\| + \\ &\|l_i\| M'_{E_{\alpha, \alpha}} \cdot \varsigma \cdot \int_0^t \tau^{2\alpha-1} e^{-r_i \tau} \, d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

显然, 积分 $\int_0^t \tau^{2\alpha-1} e^{-r_i \tau} \, d\tau$ 是收敛的, 即存在正常数 u_1 , 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|p_i(t)\| \leq u_1$ 。

即在情况1的条件下, 系统是拉格朗日渐近稳

定的。

情况 2: $r_i \neq w_i$, 式 (5) 进行反拉普拉斯变换有:

$$\left\{ \begin{aligned} m_i(t) &= m_i(t_0) \cdot E_{\alpha}(-w_i t^{\alpha}) + \\ & t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-w_i t^{\alpha}) * h_i[p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)] \\ p_i(t) &= p_i(t_0) E_{\alpha}(-r_i t^{\alpha}) + \\ & \frac{l_i}{w_i - r_i} m_i(t_0) \cdot E_{\alpha}(-r_i t^{\alpha}) + \\ & \frac{l_i}{r_i - w_i} m_i(t_0) \cdot E_{\alpha}(-w_i t^{\alpha}) + \\ & \frac{l_i}{r_i - w_i} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-w_i \tau^{\alpha}) \cdot h_i(t - \tau) d\tau + \\ & \frac{l_i}{w_i - r_i} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-r_i \tau^{\alpha}) \cdot h_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \right. \quad (12)$$

则 $m_i(t)$ 与情况 1 一致, 即存在正常数 v_2 , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|m_i(t)\| \leq v_2$ 。

对于 $p_i(t)$ 有:

$$\begin{aligned} \|p_i(t)\| &\leq \|p_i(t_0)\| M_{E_{\alpha}} \|e^{-r_i t}\| + \\ & \left\| \frac{l_i}{w_i - r_i} m_i(t_0) \cdot M_{E_{\alpha}} \|e^{-r_i t}\| + \right. \\ & \left\| \frac{l_i}{r_i - w_i} m_i(t_0) \cdot M'_{E_{\alpha}} \|e^{-w_i t}\| + \right. \\ & \left\| \frac{l_i \cdot \varsigma}{r_i - w_i} \left\| \int_0^t \tau^{\alpha-1} M_{E_{\alpha,\alpha}} e^{-w_i \tau} d\tau \right\| \right\| + \\ & \left\| \frac{l_i \cdot \varsigma}{w_i - r_i} \left\| \int_0^t \tau^{\alpha-1} M_{E_{\alpha,\alpha}} e^{-r_i \tau} d\tau \right\| \right\| \end{aligned} \quad (13)$$

同理, 存在正常数 u_2 , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_i(t)\| \leq u_2$, 综上所述两种情况可知, 在 $t \rightarrow \infty$ 时, 存在正常数 $v = \max\{v_1, v_2\}$ 和 $u = \max\{u_1, u_2\}$ 使得 $\|m_i(t)\| \leq v$ 和 $\|p_i(t)\| \leq u$ 成立, 则系统是拉格朗日渐近稳定。

4 数值仿真

通过一个仿真实例验证了系统拉格朗日渐近稳定判据的有效性。以分数阶基因调控网络具有 SUM 逻辑为例, 即有 $h_i = \sum_{j=1}^n h_{ji}[p_j(t)]$, 其中 $h_{ji}[p_j(t)]$ 的表达式如下:

$$h_{ji}[p_j(t)] = r_{ij} \frac{\left(\frac{p_j(t)}{\sigma_j}\right)^{\lambda_j}}{1 + \left(\frac{p_j(t)}{\sigma_j}\right)^{\lambda_j}} \quad (14)$$

$$h_{ji}^*[p_j(t)] = r_{ij} \frac{1}{1 + \left(\frac{p_j(t)}{\sigma_j}\right)^{\lambda_j}} \quad (15)$$

当基因 i 受到转录因子 j 的激活时, 式(14)是

成立的; 当基因 i 受到转录因子 j 的抑制时, 式(15)成立。其中 r_{ij} 表示的是转录因子 j 到 i 的无量纲转录速率; λ_j 正数被称为 Hill 系数; σ_j 是一个正常数^[17]。即存在 $\varsigma = \sum_{i=1}^n |r_{ij}|$, 使得 $\|h_i(t)\| \leq \varsigma$ 。

$$\left\{ \begin{aligned} {}^C_{t_0} D_t^{\alpha} m_1(t) &= -0.2m_1(t) + 8 \frac{p_1^2(t)}{1 + 6p_1^2(t)} + 5 \frac{p_2^2(t)}{1 + p_2^2(t)} \\ {}^C_{t_0} D_t^{\alpha} p_1(t) &= -0.8p_1(t) + 3m_1(t) \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} {}^C_{t_0} D_t^{\alpha} m_2(t) &= -0.8m_2(t) + 3 \frac{p_1^5(t)}{1 + 6p_1^5(t)} + 7 \frac{p_2^5(t)}{1 + p_2^5(t)} \\ {}^C_{t_0} D_t^{\alpha} p_2(t) &= -0.2p_2(t) + 5m_2(t) \end{aligned} \right. \quad (17)$$

式(16)中对应式(3)中的参数分别为: $h_1 = 8 \frac{p_1^2(t)}{1 + 6p_1^2(t)} + 5 \frac{p_2^2(t)}{1 + p_2^2(t)}$, $w_1 = 0.2$, $r_1 = 0.8$, $l_1 = 3$; 式

(17) 对应的参数为: $h_2 = 3 \frac{p_1^5(t)}{1 + 6p_1^5(t)} + 5 \frac{p_2^5(t)}{1 + p_2^5(t)}$, $w_2 = 0.8$, $r_2 = 0.2$, $l_2 = 0.5$ 。显然, 通过

式(16)和式(17)可以观察到 $\frac{p_1^2(t)}{1 + 6p_1^2(t)}$ 、

$\frac{p_2^2(t)}{1 + p_2^2(t)}$ 、 $\frac{p_1^5(t)}{1 + 6p_1^5(t)}$ 和 $\frac{p_2^5(t)}{1 + p_2^5(t)}$ 是有界的。通过

采用迭代法进行近似计算, 使用 MATLAB 进行数值仿真, 不妨取 $\alpha = 0.2$, 初值条件为 $(m_1(0), m_2(0), p_1(0), p_2(0)) = (10, 10, 10, 10)$, 则图 1(a)清晰的显示 mRNA 状态和图 1(b)显示蛋白质的状态。通过图像分析, 可以得出该系统是拉格朗日渐近稳定。为了更具有说服力, 而加入的另外两组数据进行数值仿真, 如图 2、图 3 和图 4 所示 (其中图 2 的微分阶为 0.5, 初值条件为 $(m_1(0), m_2(0), p_1(0), p_2(0)) = (15, 25, 26, 50)$; 图 3 的微分阶为 0.8, 初值条件为 $(m_1(0), m_2(0), p_1(0), p_2(0)) = (10, 20, 30, 40)$; 图 4 的微分阶为 1 初值条件为 $m_1(0), m_2(0), p_1(0), p_2(0) = (15, 20, 25, 50)$, 图 1(a)、图 2(a)、图 3(a)和图 4(a)分别描述了系统微分阶数为 0.2、0.5、0.8、1 的 mRNA 浓度的状态轨迹, 可观测出系统 mRNA 浓度的变化趋近于某一常数, 可得出系统 mRNA 的变化是拉格朗日稳定的; 同理, 图 1(b)、图 2(b)、图 3(b)和图 4(b)分别描述了系统微分阶数为 0.2、0.5、0.8、1 的蛋白质浓度的状态轨迹, 可观测出系统蛋白质浓度的变化趋近于某一常数, 可得出系统蛋白质的变化是拉格朗日稳定的。

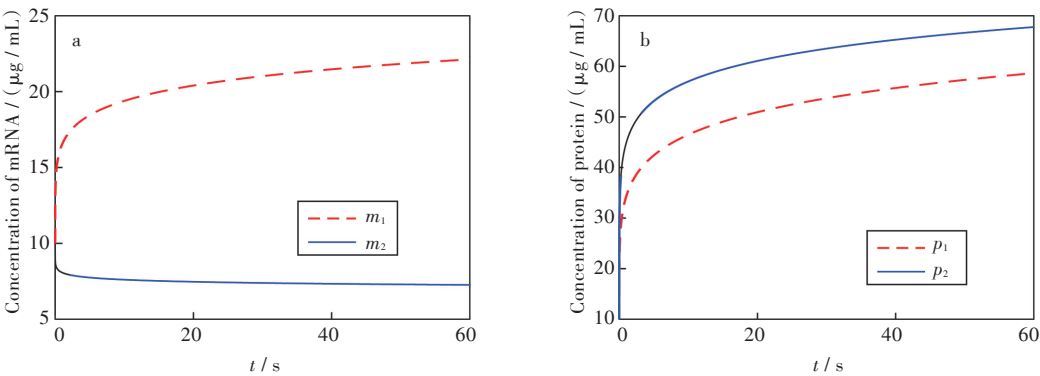


图 1 $\alpha=0.2$ 的 mRNA 和蛋白质的浓度状态轨迹:(a)mRNA,(b)蛋白质

Fig. 1 State trajectory of mass concentration of mRNA and protein ($\alpha=0.2$):(a)mRNA,(b)protein

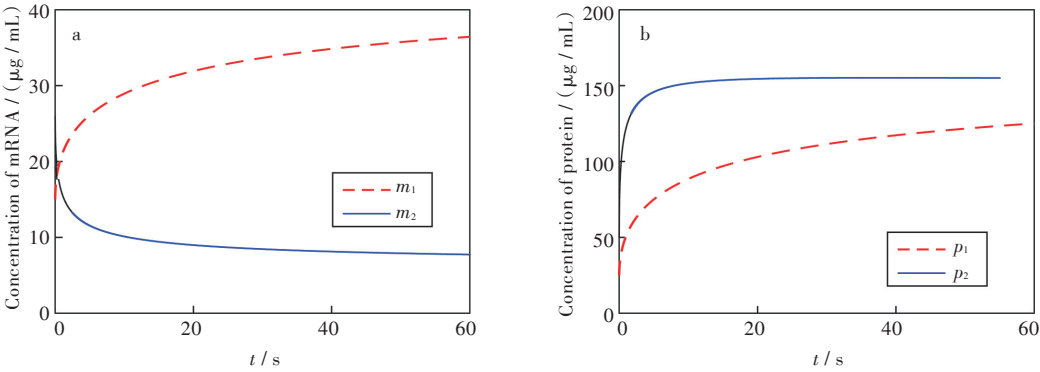


图 2 $\alpha=0.5$ 的 mRNA 和蛋白质的浓度状态轨迹:(a)mRNA,(b)蛋白质

Fig. 2 State trajectory of mass concentration of mRNA and protein($\alpha=0.5$):(a)mRNA,(b)protein

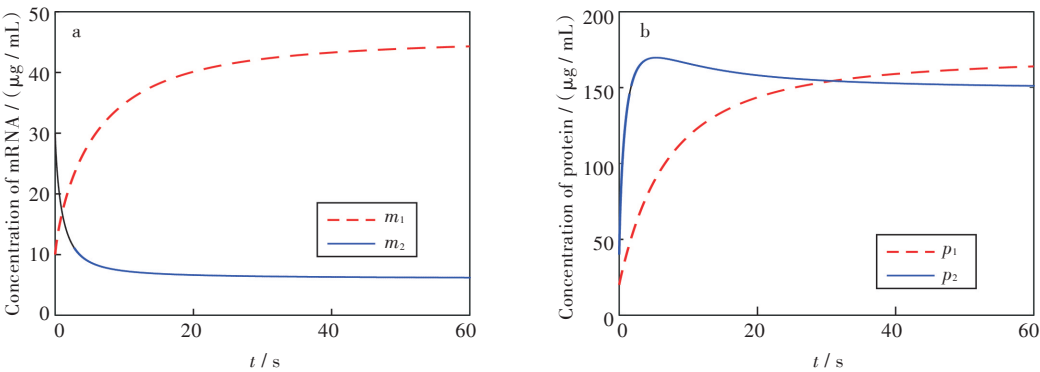


图 3 $\alpha=0.8$ 的 mRNA 和蛋白质的浓度状态轨迹:(a)mRNA,(b)蛋白质

Fig. 3 State trajectory of mass concentration of mRNA and protein ($\alpha=0.8$):(a)mRNA,(b)protein

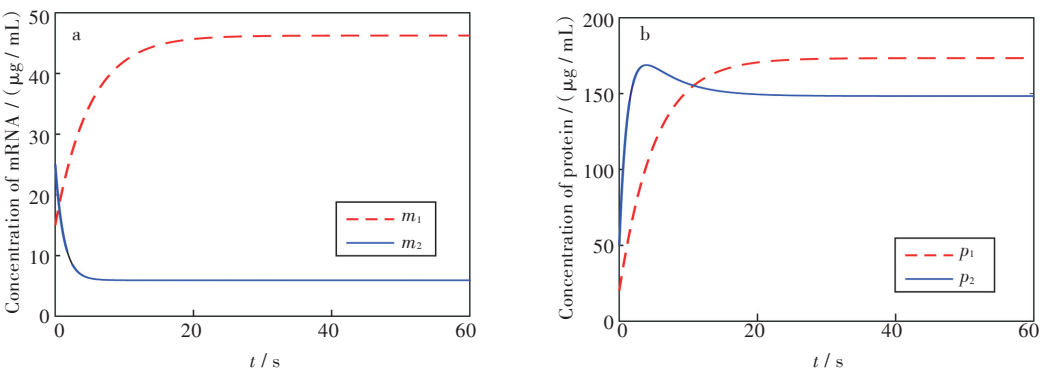


图 4 $\alpha=1$ 的 mRNA 和蛋白质的浓度状态轨迹:(a)mRNA,(b)蛋白质

Fig. 4 State trajectory of mass concentration of mRNA and protein($\alpha=1$):(a)mRNA,(b)protein

5 结 语

分数阶基因调控网络作为一类新型的网络系统,真实地反映了系统的本质特性。本文针对分数阶基因调控网络,采用放缩原理、拉普拉斯变换和卷积公式,证明了 $0 < \alpha < 1$ 的Caputo分数阶基因调控网络的拉格朗日渐近稳定,并通过MATLAB进行数值仿真,验证所得判据的有效性。此外,所得结论在整数阶数 $\alpha = 1$ 仍然成立。

参考文献

[1] LI G, LIU H. Stability analysis and synchronization for a class of fractional-order neural networks[J]. Entropy, 2016, 18(2): 55–68.

[2] 刘艳.基因调控网络分析和重建[D].南京:南京理工大学, 2004.

[3] ZHANG Z, ZHANG J, AI Z. A novel stability criterion of the time-lag fractional-order gene regulatory network system for stability analysis [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 66 (1): 96–108.

[4] 杨林, 贺大林. Cancer Research: 通过基因调控网络分析识别结肠癌药物代谢的性别差异[J]. 现代泌尿外科杂志, 2018, 23(12): 963–976.

[5] 代文哲, 黄翔, 马静, 等. 三嗪类衍生物的合成及抑菌活性测定[J]. 武汉工程大学学报, 2018, 40(6): 606–609.

[6] REN F, CAO F, CAO J. Mittag-Leffler stability and generalized Mittag-Leffler stability of fractional-order gene regulatory networks [J]. Neurocomputing, 2015, 160(6): 185–190.

[7] ZHANG Y, PU Y, ZHANG H, et al. An extended fractional Kalman filter for inferring gene regulatory networks using time-series data [J]. Chemometrics and

Intelligent Laboratory Systems, 2014, 138: 57–63.

[8] 何基好, 丁倩倩, 蔡江华. 有限理性与拉格朗日微分中值问题解的稳定性[J]. 高等数学研究, 2017, 20(4): 10–12.

[9] LIAO X X, LUO Q, ZENG Z G, et al. Global exponential stability in Lagrange sense for recurrent neural networks with time delays [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9(4): 1535–1557.

[10] WU A, ZENG Z, FU C, et al. Global exponential stability in Lagrange sense for periodic neural networks with various activation functions[J]. Neurocomputing, 2011, 74(5): 831–837.

[11] 易书明, 蹇继贵. 基于忆阻的脉冲BAM神经网络的拉格朗日稳定性[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2016: 38(3): 98–103.

[12] 何基好. 拉格朗日微分中值定理中间点集的稳定性[J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2016, 33(1): 13–15.

[13] 吴爱龙. 基于忆阻的递归神经网络的动力学分析[D]. 武汉: 华中科技大学, 2013.

[14] DIETHELM K, FORD N J. Analysis of fractional differential equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 265(2): 229–248.

[15] 陈立平. 分数阶非线性系统的稳定性与同步控制[D]. 重庆: 重庆大学, 2013.

[16] XU G, BAO H. The Lagrange stability of fractional-Order gene regulatory networks [C]//2018 Chinese Automation Congress (CAC). Xi'an: IEEE, 2018: 3422–3427.

[17] WANG H X, LIU G D, SUN Y H, et al. Robust stability of stochastic delayed genetic regulatory networks[J]. Cognitive Neurodynamics, 2009, 3(3): 271–280.

本文编辑: 陈小平